1	2	3	4	5	6	7	8	Toplam

Ad-Soyad :

Numara :

2018-2019 Bahar Dönemi ANALİZ IV (A-B) Bütünleme Sınavı Soruları

1. $U \subset \mathbb{R}^n$ bir açık küme ve $x_0 \in U$ olsun. Yine $f : U \to \mathbb{R}^m$ ve $g : U \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonları bir $x_0 \in U$ noktasında türevlenebilir olsunlar. Bu takdirde, $f + g$ fonksiyonu da $x_0 \in U$ noktasında türevlenebilir olup, $D(f+g)(x_0) = D(f)(x_0) + D(g)(x_0)$ olur, ispatlayınız.

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - y^3x}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor. Bu fonksiyonun $D_1 f(0,0)$, $D_2 f(0,0)$, $D_1D_2 f(0,0)$ ve $D_2D_1 f(0,0)$ kısmi türevlerini bulunuz.

3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $u = x^3 f\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\right)$ ise $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 3u$ olduğunu gösteriniz.

4. $U \subset \mathbb{R}^n$ bir açık ve bağlantılı bir küme, $f : U \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu U üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer her $c \in U$ için $Df(c) = 0_{mxn}$ ise f fonksiyonu U üzerinde sabit bir fonksiyondur, ispatlayınız.

5. $f(x,y) = x^2y$ fonksiyonu verilsin. **a)** $\nabla f(3,2)$ gradyen vektörünü bulunuz.
b) f nin $(3,2)$ noktasında ve $(1,2)$ vektörü yönündeki türevini bulunuz.

6. $f(x,y,z) = z^2$ fonksiyonunun $x^2 + y^2 - z = 0$ yüzeyi üzerindeki maksimum ve minimumunu araştırınız.

7. $x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 = 0$ ve $2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 = 0$ denklemleri verilmiş olsun. O zaman $P = (x,y,u,v) = (2,-1,2,1)$ noktasının bir komşuluğunda u ile v değişkenleri x ile y değişkenlerine göre çözülebildiğini gösteriniz. u_x ve v_y kısmi türevlerini bulunuz.

8. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \left(x^3 e^y + y - 2x, 2xy + 2x\right)$ fonksiyonunu $(1,0)$ noktası civarında diferansiyellenebilir bir ters fonksiyona sahip olduğunu gösteriniz ve varsa $Df^{-1}(-1,2)$ türev matrisini bulunuz.

Not: **Sadece 6 tane soru cevaplayınız. Süre 110 dakikadır.**

BAŞARILAR…

Prof. Dr. Cenap DUYAR - Doç. Dr. Ayşe SANDIKÇI

ANALİZ IV DERSİ BÜTÜNLEME SINAVI CEVAP ANAHTARI

1) Defterde var

2)

$$D_1 f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h^2}=0$$

$$D_2 f(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0}{k^2}=0$$

$$D_2 f(h,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(h,k)-f(h,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{h^3k-k^3h}{h^2+k^2}-0}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{h^3-k^2h}{h^2+k^2}=h$$

$$D_1 f(0,k)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,k)-f(0,k)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3k-k^3h}{h^2+k^2}-0}{h}=\lim_{k\to 0}\frac{h^2k-k^3}{h^2+k^2}=-k$$

bulunur. Böylece

$$D_1D_2 f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{D_2 f(h,0)-D_2 f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h}=1$$

$$D_2D_1 f(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{D_1 f(0,k)-D_1 f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{-k-0}{k}=-1$$

elde edilir.

3) $v_1=\dfrac{y}{x}$ ve $v_2=\dfrac{z}{x}$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=3x^2 f\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)+x^3\left(\frac{\partial f}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)\\&=3x^2 f\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)+x^3\left(\frac{\partial f}{\partial v_1}\left(-\frac{y}{x^2}\right)+\frac{\partial f}{\partial v_2}\left(-\frac{z}{x^2}\right)\right)\\&=3x^2 f\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)-xy\frac{\partial f}{\partial v_1}-xz\frac{\partial f}{\partial v_2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^3\left(\frac{\partial f}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)=x^3\left(\frac{\partial f}{\partial v_1}\frac{1}{x}+\frac{\partial f}{\partial v_2}0\right)=x^2\frac{\partial f}{\partial v_1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^3\left(\frac{\partial f}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)=x^3\left(\frac{\partial f}{\partial v_1}0+\frac{\partial f}{\partial v_2}\frac{1}{x}\right)=x^2\frac{\partial f}{\partial v_2}$$

bulunur. Böylece

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=3x^3 f\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)-x^2y\frac{\partial f}{\partial v_1}-x^2z\frac{\partial f}{\partial v_2}+x^2y\frac{\partial f}{\partial v_1}+x^2z\frac{\partial f}{\partial v_2}=3u$$

elde edilir.

4) Defterde var.

5) a) $f_x(x,y)=2xy \qquad f_y(x,y)=x^2$

$$f_x(3,2)=12 \qquad f_y(3,2)=9$$

olduğundan $\nabla f(3,2)=(12,9)$ yazılır.

b) $(1,2)$ vektörü yönündeki birim vektör

$$\vec{u}=\frac{(1,2)}{\|(1,2)\|}=\frac{(1,2)}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{(1,2)}{\sqrt{5}}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

olup, aşikar olarak $f(x,y)=x^2y$ fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerinde diferansiyellenebilir olduğundan f nin $(3,2)$ noktasında ve $(1,2)$ vektörü yönündeki türevi

$$D_{\vec{u}}f(3,2)=\nabla f(3,2)\cdot\vec{u}=(12,9)\cdot\left(1/\sqrt{5},2/\sqrt{5}\right)=\frac{12}{\sqrt{5}}+\frac{18}{\sqrt{5}}=\frac{30}{\sqrt{5}}$$

olarak bulunur.

6) $f(x,y,z)=z^2$ ve $g(x,y,z)=x^2+y^2-z$ olmak üzere

$$\begin{aligned}L(x,y,z,\lambda)&=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)\\&=z^2+\lambda\left(x^2+y^2-z\right)\end{aligned}$$

Lagrange fonksiyonunu ele alalım. O zaman

$$\nabla L(x,y,z,\lambda)=\left(-2\lambda x,-2\lambda y,2z+\lambda,x^2+y^2-z\right)=0$$

denkleminden

$$\begin{cases}0=2\lambda x\\0=2\lambda y\\2z=-\lambda\\x^2+y^2-z=0\end{cases}$$

sistemi bulunur. Eğer $\lambda\neq 0$ ise ilk iki denklemden $x=y=0$ ve son denklemden $z=0$ olup, $(0,0,0)$ bir kritik noktadır. Eğer $\lambda=0$ ise üçüncü denklemden $z=0$ ve dördüncü denklemden $x=y=0$ bulunur. O halde tek kritik nokta $(0,0,0)$ dır. Her $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ için $f(0,0,0)=0$ aranan minimumdur ve f verilen koşul altında maksimumu yoktur.

7) $F_1 = x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4$ ve $F_2 = 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8$ olsun.

a) $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $F = (F_1, F_2) = \left(x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4, 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8\right)$

olmak üzere

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -3u^2 & 2v \\ -4u & 12v^3 \end{vmatrix} = -36u^2v^3 + 8uv \text{ ve } \left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}\right|_P = \left.\begin{vmatrix} -3u^2 & 2v \\ -4u & 12v^3 \end{vmatrix}\right|_P = \begin{vmatrix} -12 & 2 \\ -8 & 12 \end{vmatrix} = -128 \neq 0$$

olduğundan Kapalı Fonksiyon teoremine göre u ile v değişkenleri x ile y değişkenlerine göre çözülebilir.

b) $$u_x = -\frac{\partial(F_1,F_2)/\partial(\mathrm{x},v)}{\partial(F_1,F_2)/\partial(u,v)} = -\frac{\begin{vmatrix} 2x & 2v \\ 2y & 12v^3 \end{vmatrix}}{-36u^2v^3 + 8uv} = \frac{4yv - 24xv^3}{-36u^2v^3 + 8uv}$$ ve

$$v_y = -\frac{\partial(F_1,F_2)/\partial(\mathrm{u},\mathrm{y})}{\partial(F_1,F_2)/\partial(u,v)} = -\frac{\begin{vmatrix} -3u^2 & -2y \\ -4u & 2x+2y \end{vmatrix}}{-36u^2v^3 + 8uv} = \frac{6xu^2 + 6yu^2 + 8yu}{-36u^2v^3 + 8u}.$$

8) f fonksiyonunun bileşen fonksiyonlarının kısmi türevleri var ve $\mathbb{R}^2$ üzerinde süreklidir. Böylece f fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerinde diferansiyellenebilirdir ve

$$Df = \begin{bmatrix} 3x^2e^y - 2 & x^3e^y + 1 \\ 2y + 2 & 2x \end{bmatrix} \Rightarrow Df(1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ ve } \det\left(Df(1,0)\right) = -2 \neq 0$$

olduğundan f fonksiyonu $(1,0)$ civarında yerel terse sahiptir. $f(1,0) = (-1,2)$ olduğundan

$$Df^{-1}(-1,2) = \left(Df(1,0)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Elde edilir.